(ACTA F. R. N. UNIV. COMEN. – MATHEMATICA XXXII, 1975)
ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE
MATHEMATICA XXXII – 1975

Planárne mapy s predpísanými stupňami vrcholov a oblastí

MARIÁN TRENKLER, Košice

Úvod

Nech $p_k(M)$ resp. $v_k(M)$ označuje počet k-uhclníkových oblastí (k-uholníkov), resp. k-valentných vrcholov plenárnej mapy M so súvislým grafom.

Položme si nasledujúcu otázku: Ak máme danú dvojicu postupností $p = (p_1, p_2, p_3, \ldots)$ a $v = (v_1, v_2, v_3, \ldots)$ z celých nezáporných čísel, či existuje taká planárna mapa M, pre ktorú platí $p_k(M) = p_k$, $v_k(M) = v_k$ pre všetky $k \neq 4$. Keď takáto mapa M existuje, hovoríme, že dvojica postupností p, v je realizovateľná.

Z Eulerovej vety vyplyva nasledujúca nevyhnutná podmienka na realizovanie dvojice p, v

$$\sum_{k\geq 1} (4-k)(p_k + v_k) = 8. \qquad (1)$$

Ďalšia nutná podmienka je $\sum_{k\geq 1} kp_k \equiv 0 \pmod 2$. (2)

V tejto práci je daná nutná a postačujúca podmienka na realizovanie danej dvojice postupností p, v. V špeciálnom prípade, keď platí $p_k = v_k = 0$, pre k=1,2 odpoveď na už položenú otázku dávajú práce [1] a [2]. Na rozdiel od týchto prác pri použití konštrukcie opísanej v tejto práci mapa M obsahuje podstatne menší počet štvoruholníkov a štvorvalentných vrcholov.

Náš výsledok je sformulovaný v nasledujúcej vete:

V e t a . Dvojica postupností $p = (p_1, p_2, p_3, \dots)$, $v = (v_1, v_2, v_3, \dots)$ z celých nezáporných čísel je realizovateľná práve vtedy, keď spĺňa podmienky (1), (2) a odlišuje sa od dvojíc spĺňajúcich podmienky

$$p_k = v_k = 0 \text{ pre všetky } k \not\equiv 0 \pmod 2 \text{ a } \sum_{k \equiv 2 \pmod 4} v_k = 1 \pmod 2. \tag{3}$$

D ô k a z . Najskôr dokážeme, že dvojica postupností p, v spĺňajúca (1), (2), (3) nie je realizovateľná.

MALKEVITCH dokázal [3, str. 16], že dvojica p, v nie je realizovateľná, keď spĺňa (1), (2) a platí $p_k = v_k = 0$ pre všetky $k \not\equiv 0 \pmod 2$ a $\sum_{k \equiv 2 \pmod 4} v_k = 1$.

Predpokladajme, že daná dvojica postupností p, v spĺňajúca (1), (2), (3) je realizovateľná; z toho vyplýva, že existuje príslušná mapa M. V tejto mape spárujme navzájom všetky 2(mod4) - valentné vrcholy, okrem jedného. Pre každú dvojicu vrcholov, ktorá vznikla spárovaním, zvoľme jednu jednoduchú cestu, ktorá ich spája. Každú hranu tejto cesty doplníme dvoma novými hranami, ktorých vrcholy budú totožné s vrcholmi dopĺňanej hrany. Takýmto doplnením hrán zväčší sa násobnosť všetkých vrcholov zvolenej cesty o štyri, okrem dvojice 2(mod4) -valentných vrcholov, ktoré sa stanú 0(mod4) - valentné, pričom vzniknú len dvojuholníky. Takto vznikne mapa, ktorá podľa už uvedenej vety neexistuje.

Že podmienky postačujú, dokážeme tak, že pre každú dvojicu postupností p,v spĺňajúcu nevyhnutné podmienky, opíšeme konštrukciu mapy M, ktorá obsahuje predpísaný počet k-uholníkov a k-valentných vrcholov pre všetky $k \neq 4$, štvoruholníkov a štvorvalentných vrcholov.

I. N e c h p l a t í $\sum_{k\geq 5} v_k = 0$

I.1. $v_2 \equiv 0 \pmod 2$

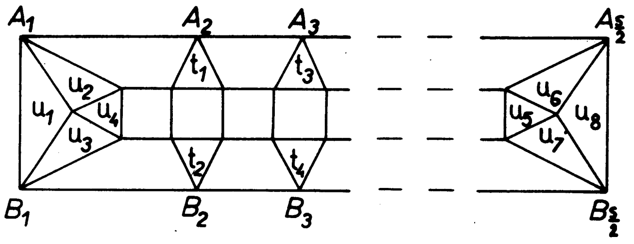
Pri konštrukcii vyjdeme podľa potreby z jednej zo štvorvalentných máp M_1, M_2 alebo M_3. Mapu M_1 použijeme vo všetkých prípadoch, keď $s \equiv 0 \pmod 2$ a súčasne neplatia obe nasledujúce podmienky $p_1 + p_3 = 0$, $v_1 \neq 0$, mapu M_2, keď $s \equiv 0 \pmod 2$ a nemôžeme použiť M_1 a mapu M_3 v prípade, keď $s \equiv 1 \pmod 2$, kde $s = \sum_{k\geq 5} (k-4)\, p_k$.

Mapa M_1 (obr.2) obsahuje jeden s-uholník $A_1A_2 \dots A_{\frac{s}{2}} B_{\frac{s}{2}} \dots B_1$, 2s-5 štvoruholníky a s+8 trojuholníky, ktoré označíme podľa obrázku $u_1, u_2, \dots, u_8, t_1, t_2, \dots, t_s$. Mapa M_2 (obr.3) obsahuje jeden s-uholník $A_1 \dots A_{\frac{s+2}{2}} B_{\frac{s}{2}} \dots B_2$, 2s-7 štvoruholníky a s+8 trojuholníky $u_1, u_2, \dots, u_6, t_1, \dots t_{s+2}$. Mapa M_3 (obr.4) obsahuje s-uholník $A_1A_2 \dots A_{\frac{s+1}{2}} B_{\frac{s-1}{2}} \dots B_1$, 2s-6 štvoruholníky a s+8 trojuholníky $u_1, \dots u_7, t_1, \dots, t_{s+1}$.

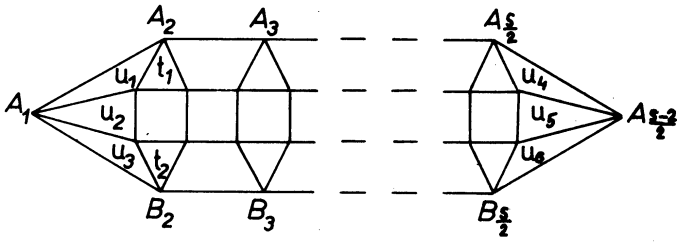
Ďalej vytvoríme z s-uholníka p_k k-uholníkov, $k\geq 5$. Najskôr opíšeme ich vytváranie v mapách M_1 a M_3.

Nech $k=2m$ a $p_k \neq 0$. Vyberieme bod R_1 na hrane $A_{m-1}A_m$ a bod R_2 na hrane $B_{m-1}B_m$. Spojením R_1 s R_2 novou hranou vznikne k-uholník $A_1 \dots A_{m-1}R_1R_2B_{m-1} \dots B_1$. Vrcholy R_1, R_2 sú trojvalentné; aby boli štvorvalentné spojíme ich cestou pretínajúcou len tri štvoruholníky tak, aby vznikli dva štvorvalentné vrcholy a tri štvoruholníky.

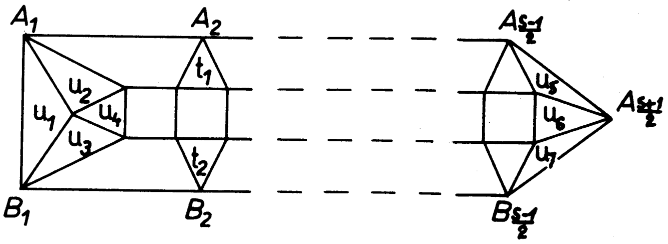
Steny s neprárnym počtom hrán budeme vytvárať po dvojiciach okrem jednej, keď s je nepárne. Nech $k=2m+1$ a $t=2n+1$, přičom $p_k \neq 0$ a $p_t \neq 0$. Pre jednoduchosť indexovania predpokladajme, že z s-uholníka začíname vytvárať k-uholník s t-uholníkom. Najskôr vytvorme $2(m+n-1)$-uholník



obr.2

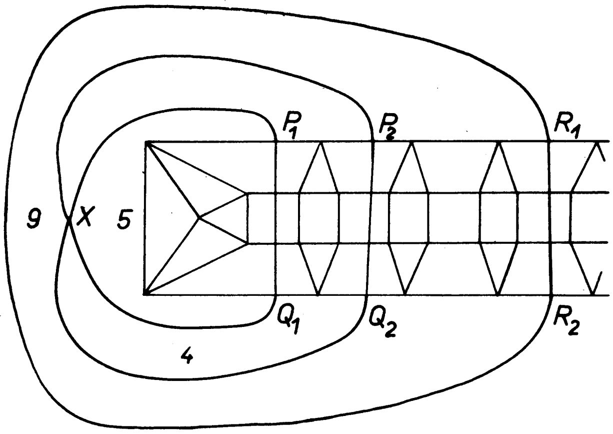


obr.3



obr.4

$A_1 \dots A_{m+n-2} R_1 R_2 B_{m+n-2} \dots B_1$. Vyberme bod P_1 na hrane $A_{m-1}A_m$, bod P_2 na $B_{m-1}B_m$, bod Q_1 na A_mA_{m+1}, a bod Q_2 na B_mB_{m+1}, resp. Q_1 na hrane A_mR_1 a Q_2 na B_mR_2, keď t=5. Spojme P_1 hranu s Q_2 a bod P_2 s Q_1 cestou dĺžky dva pretínajúcou hranou P_1Q_2. Takto vznikne dvojica nepárnouholníkov a dva štvoruholníky $XP_1A_mQ_1$ a $XP_2B_mQ_2$, kde X je spoločný vrchol cesty P_1Q_2 s P_2Q_1 . Rovnako ako vyššie vytvoríme z trojvalentných vrcholov P_1, P_2, Q_1, Q_2 štvorvalentné. Na obr. 4 je 5-uholník s 9-uholníkom.



obr.5

Takto vytvoríme všetky predpísané k-uholníky, $k \geq 5$.

Vytvráranie k-uholníkov, $k \geq 5$, v mape M_2 je podobné. Keď existuje také $k=2m+1$, že $p_k \neq 0$, potom vyberieme body R_1 na hrane $A_m A_{m+1}$ a R_2 na $B_m B_{m+1}$ a ich spojením hranou vznikne k-uholník a ďalší postup je rovnaký ako vyššie. Keď takéto k neexistuje, potom každá stena vznikne rovnako ako prvý nepárnouholník v mape M_1 .

Ďalej vytvoríme z trojuholníkov postupne v_3 trojvalentných vrcholov, p_2 dvojuholníkov, p_1 jednouholníkov a v_1 jednovalentných vrcholov. Pritom platí zásada, že okrem niekoľkých výnimiek, pozmieňame trojuholníky v nasledujúcom poradí $u_1, u_2, \dots, u_i, t_1, t_2, \dots, t_j, u_{i+1}, \dots, u_k$, kde $i=4$, $j=s$, $k=8$, keď sme vychádzali z mapy M_1; $i=3$, $j=s+2$, $k=6$ pri M_2 a $i=4$, $j=s+1$, $k=7$ pri použití M_3.

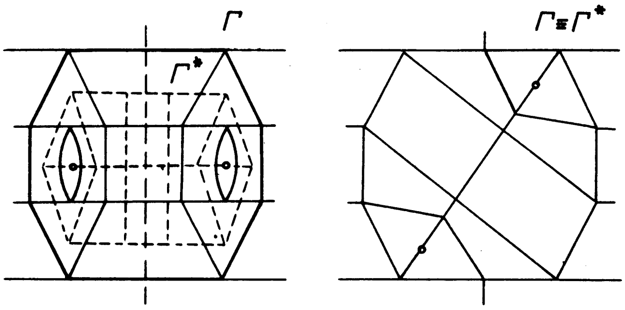
$a_1/$ $v_1=0$, $p_1 + p_3 \equiv 0 \pmod 2$

V tomto prípade za základ konštrukcie slúži mapa M_1.

Zo štvorice trojuholníkov so spoločným vrcholom vznikne štvorica trojvalentných vrcholov a päť štvoruholníkov, keď spoločný vrchol nahradíme štvoruholníkom. Keď potrebujeme len dva takéto vrcholy, potom do tohto štvoruholníka doplníme uhlopriečku. Dvojicu trojvalentných vrcholov a tri štvoruholníky vytvoríme z dvojice trojuholníkov t_{2i-1}, t_{2i}, $i=1,2,\dots\frac{s}{2}$, keď na ich hranách, ktoré sú súčasne hranami jedného štvoruholníka, vyberieme dva body a tieto spojíme novou hranou.

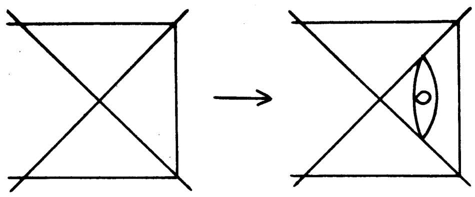
Dvojuholník vytvoríme z dvojice trojvalentných vrcholov spojených hranou, keď ich spojíme ešte jednou hranou.

Dvojicu dvojvalentných vrcholov vytvoríme z dvoch dvojuholníkov, ktoré vznikli zo štvorice trojuholníkov so spoločným vrcholom, alebo štvorice trojuholníkov $t_i,\dots,t_{i+3}$, $i=1,3,\dots$, alebo $s-1$. Tieto dvojuholníky s $11+3x$ štvoruholníkmi (x je počet bodov vybratých na hrane $A_{\frac{i+3}{2}}A_{\frac{i+5}{2}}$ pri vytváraní k-uholníkov, $k\geq 5$,) tvoria súvislú časť mapy, ktorá je ohraničená grafovou kružnicou Γ. Na obr.6 je Γ nakreslená hrubou čiarou. Rozrežme mapu pozdĺž Γ a k časti obsahujúcej dvojuholníky vytvorme duálnu časť (čiarkovane nakreslená na obr.6). Označme Γ^* kružnicu z hrán spájajúcich vrcholy priradené dualizáciou tým štvoruholníkom, ktorých hrany boli hranami Γ. Pretože počet vrcholov Γ aj Γ^* je rovnaký, môžeme obe časti spojiť tak, aby vznikla mapa, v ktorej namiesto dvoch dvojuholníkov budú dva dvojvalentné vrcholy.(obr.7)

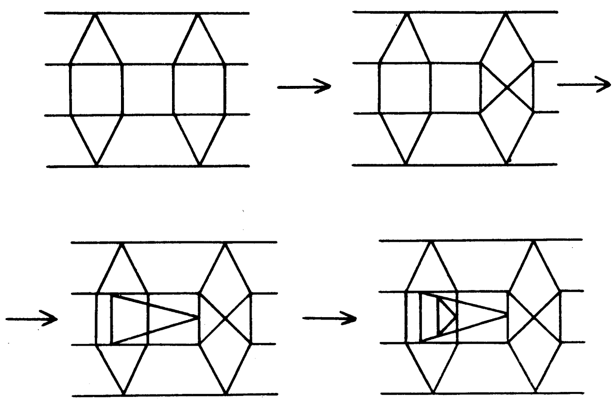


obr. 6 obr. 7

Jednouholník vytvoríme z trojice trojuholníkov so spoločným vrcholom tak, ako je to na obr. 8. Keď takáto trojica trojuholníkov nie je k dispozícii, vytvoríme ju postupne tak, ako je to na obrázku 9.



obr.8



obr.9

$a_2/$ $v_1 = 0,$ $p_1 + p_3 \equiv 1 \pmod{2}$

V tomto prípade za základ konštrukcie slúži mapa M_3.

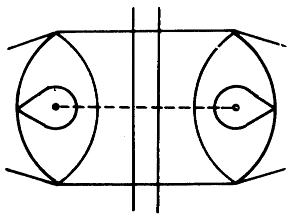
Postup konštrukcie je rovnaký ako v $a_1/$, iba naviac musíme opísať vytvorenie dvojice trojvalentných vrcholov z trojuholníkov u_6 a u_7. Tieto vzniknú spolu s dvoma štvoruholníkmi, keď spoločný vrchol týchto trojuholníkov nahradíme hranou.

$b_1/$ $v_1 \neq 0,$ $p_1 + p_3 \neq 0$

V tomto prípade postupujeme rovnako ako v $a_1/$ alebo $a_2/$.

$\left[\frac{v_1}{2}\right]$ dvojíc jednovalentných vrcholov naviac vytvoríme z rovnakého počtu jednouholníkov tak, ako je to čiarkovane nakreslené na obr. 10. Pred vytvorením týchto dvojíc jednouholníkov nevytvoríme všetky jednouholníky, ale iba jeden, alebo jeden trojuholník. Keď v_1 je nepárne, potom aj v_3 je nepárne číslo. Dvojicu jednovalentný a trojvalentný vrchol vytvoríme z jednouholníka a trojuholníka podobne, ako dvojicu jednovalentných vrcholov.

b_2/ $v_1 \neq 0$, $p_1 + p_3 = 0$



obr.10

Pri konštrukcii vychádzame z mapy M_2. Postup konštrukcie je podobný ako vyššie. V tomto prípade vznikne dvojica jednouholníkov, z ktorých vytvoríme jednovalentné vrcholy, keď sme predtým pozmenili párny počet trojuholníkov na iné predpísané oblasti a vrcholy. K zmene dôjde vo vytváraní trojvalentných vrcholov, a teda aj dvojuholníkov a dvojvalentných vrcholov, ktoré budeme vytvárať z dvojíc trojuholníkov t_i, t_{i+2}, $i=1,2,\dots,s-1$.

I.2 $v_2 = 1 (\mathrm{mod} 2)$

a/ $\sum_{5 \leq k \equiv 1 (\mathrm{mod} 2)} p_k \geq 2.$

Keď $p_i \geq 2$ a $i = 1 (\mathrm{mod} 2)$ definujme novú dvojicu postupností p', v' nasledujúcim spôsobom

$p'_i = p_i - 2$

$p'_{i-1} = p_{i-1} + 2$

$p'_k = p_k$ pre všetky $k \neq i, i-1$,

$v_2' = v_2 - 1$

$v_t' = v_t$ pre všetky $t \neq 2$,

resp. keď dva rovnaké nepárnouholníky nie sú predpísané, potom

$p_i' = p_i - 1$ kde $p_i \neq 0$, $p_j \neq 0$, $i,j \equiv 1 \pmod 2$

$p_{i-1}' = p_{i-1} + 1$

$p_j' \equiv p_j - 1$

$p_{j-1}' = p_{j-1} + 1$

$p_k' = p_k$ pre všetky $k \neq i, i-1, j, j-1$,

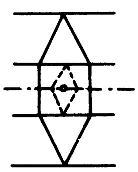
$v_2' = v_2 - 1$

$v_t' = v_t$ pre všetky $t \neq 2$.

Nech platí súčasne $v_1' \neq 0$ a $p_1' + p_3' = 0$. Najskôr zostrojíme mapu s p_k' k-uholníkmi a v_k' k-valentnými vrcholmi, pre všetky k, v ktorej dvojica (i-1) -uholníkov, resp. jeden (i-1)-uholník a (j-1) -uholník majú spoločnú hranu. Na tej vyberme bod, ktorý bude dvojvalentný vrchol.

Nech súčasne platí $v_1' \neq 0$ a $p_1' + p_3' = 0$. Najskôr zostrojíme mapu, v ktorej budú všetky predpísané vrcholy okrem jedného d dvojvalentného a všetky predpísané steny s dvoma trojuholníkmi naviac. Tieto trojuholníky musia byť umiestnené tak, aby cesta pridaná pri vytváraní dvojice jednovalentných vrcholov z dvoch jednouholníkov (bodkočiarkovaná na obr. 11) pretínala štvoruholník, ktorého dve hrany sú hranami trojuholníkov. Ďalší postup je nakreslený čiarkovane na obrázku 11.

obr.11

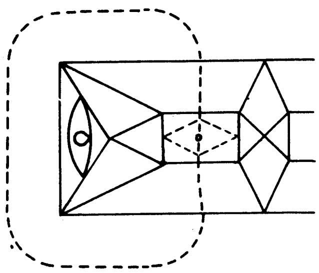


b/ $\sum_{5 \leq k \equiv 1 \pmod 2} p_k = 1.$

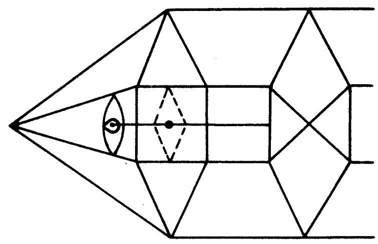
V tomto prípade postupujeme podobne ako v a/. Dvojvalentný vrchol vyberieme na hrane $A_s B_s$, ktorá pred vybratím tohto vrcholu bola spoločnou hranou $(k-1)$ -uholníka, $p_k \neq 0$ a $k \equiv 1 \pmod 2$ a trojuholníka.

c/ $p_k = 0$ pre všetky $5 \leq k \equiv 1 \pmod 2$.

Keď $p_3 \geq 2$, resp. $v_3 \geq 2$, zostrojíme mapu, ktorá obsahuje všetky predpísané vrcholy a oblasti okrem jedného dvojvalentného vrchola a dvoma trojuholníkmi naviac. Tieto s ďalšími dvoma trojuholníkmi, resp. dvoma trojvalentnými vrcholmi vzniknú z trojuholníkov u_5, u_6, u_7, u_8. V oboch prípadoch môžeme dvojicu trojuholníkov zostrojiť tak, aby mali spoločnú hranu, na ktorej vyberieme potrebný vrchol. Keď platí $\left[\frac{p_3}{2}\right] + \left[\frac{v_3}{2}\right] = 0$, potom $p_1 \geq 1$ alebo $v_1 \geq 1$. Postupujeme rovnako ako vyššie, rozdielne bude len vytvorenie dvojvalentného vrchola. V prvom prípade je toto nakreslené čiarkovane na obrázku 12 a v druhom na obrázku 13.



obr.12



obr.13

II. $\sum_{k \geq 5} p_k = 0$

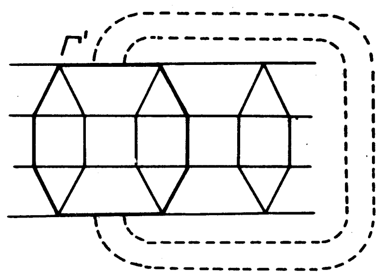
Najskôr zostrojíme mapu M^*, ktorá obsahuje v_k k-uholníky a p_k k-valentné vrcholy pre všetky k. Požadovanú mapu dostaneme, keď urobíme duálnu mapu k M^*.

$$\text{III.} \quad \sum_{k\geq 5} p_k \neq 0, \quad \sum_{k\geq 5} v_k \neq 0$$

a/ Nech súčasne neplatí neplatí $p_2=v_2=0$, $p_3\leq 1$, $v_3\leq 1$ a $\sum_{k\geq 5}(k-4)\,p_k \not\equiv 2 \pmod 3$.

Najskôr rozložíme dané postupnosti na dve dvojice postupností $r=\{r_k\}$, $w=\{w_k\}$ a $r'=\{r'_k\}$, $w'=\{w'_k\}$ tak, aby platilo $p_k = r_k + r'_k$ a $v_k = w_k + w'_k$ pre všetky $k\neq 3$, $p_3 = r_3 + r'_3 - 8$, $r_3\geq 4$, $r'_3\geq 4$ a $v_3 = w_3 + w'_3$, pričom dvojica r,w má spĺňať podmienky prípadu I. a dvojica r', w' podmienky II.

Novo definované postupnosti možno realizovať podľa I. a II. Zostrojme príslušné mapy tak, aby v oboch mapách z $u_1,\dots,u_4$ resp. z $t_i,\dots,t_{i+3}$, $i=1,3,\dots$, alebo s-3, ostala štvorica trojuholníkov, ktorú použijeme pri spájaní oboch máp. Trojuholníky $u_1,\dots,u_4$ resp. $t_i,\dots,t_{i+3}$ spolu s 5+3x alebo 8+4x (x je počet bodov vybratých na hrane $aA_{\frac{i+3}{2}}A_{\frac{i+5}{2}}$ pri vytváraní k-uholníkov, $k\geq 5$,) určujú kružnicu Γ'. Je nakreslená hrubou čiarou na obr. 14. Keď vynecháme tú časť mapy, ktorá obsahuje trojuholníky, štvoruholníky a je ohraničená kružnicou Γ' vznikne stena, ktorej každý vrchol je trojvalentný. Keď je v oboch mapách počet hrán Γ' rovnaký, postupne stotožníme vrcholy kružníc Γ' oboch máp, a takto vykonáme spojenie. V opačnom prípade najskôr musíme zväčšiť počet vrcholov Γ' v jednej z dvojice máp o párny počet tak, aby bol v oboch rovnaký. Toto vykonáme pred vytváraním predpísaných trojvalentných vrcholov tak, že na Γ' vyberieme potrebný počet bodov a tieto po dvojiciach spojíme novými cestami, ktoré vytvoria len ďalšie štvoruholníky. Dve takéto cesty sú čiarkovane nakreslené na obr. 14.



obr.14

b/ Nech platí $p_2=v_2=0$, $p_3\leq 1$, $v_3\leq 1$ a $\sum\limits_{k\geq 5}(k-4)p_k\not\equiv$

$\not\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$.

b_1/ $\qquad p_1\neq 0$

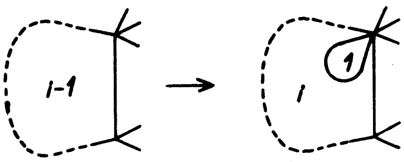
Keď $v_i\neq 0$ pre $i\geq 6$, definujme dvojicu postupností p', v' nasledovne

$$
\begin{array}{lll}
p'_1 & = p_1 - 1 & \\
p'_k & = p_k - 1 & \text{kde } p_k\neq 0,\ k\geq 5 \\
p'_{k-1} & = p_{k-1} + 1 & \\
p'_j & = p_j & \text{pre všetky } j\neq 1,\ k-1,k \\
v'_i & = v_i - 1 & \\
v'_{i-2} & = v_{i-2} + 1 & \\
v'_t & = v_t & \text{pre všetky } t\neq i-2,i,
\end{array}
$$

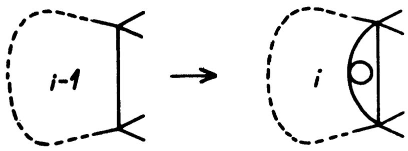
resp., keď $\sum\limits_{i\geq 6} v_i = 0$

$$
\begin{array}{lll}
v'_5 & = v_5 - 1 & \\
v'_t & = v_t & \text{pre všetky } t\neq 5.
\end{array}
$$

Dvojica postupností p', v' spĺňa predpoklady predchádzajúcich prípadov, preto opísanou konštrukciou môžeme vytvoriť mapu, v ktorej jeden (i-2)-valentný vrchol je vrcholom (i-1)--uholníka, resp. tento má dva štvorvalentné vrcholy spojené hranou. V tejto mape doplníme chýbajúci jednouholník, zväčšíme násobnosť jednej strany a jedného resp. dvoch vrcholov tak, ako je to na obrázkoch 15 a 16.



obr.15



obr.16

b2/ $p_1 = 0$

Požadovanú mapu dostaneme z príslušnej duálnej mapy, ktorú zostrojíme, keď použijeme b1/.

L I T E R A T Ú R A

[1] BARNETTE D., JUCOVIČ E. , TRENKLER M., Toroidal maps with prescribed types of vertices and faces. Mathematika /London/, 18/1971/, 82-90.

[2] GRÜNBAUM B., Planar maps with prescribed types of vertices and faces. Mathematika /London/, 16/1969/, 28-36.

[3] MALKEVITCH J., Proprieties of planar graphs with uniform vertex and face structure. Amer. Math. Soc. Memoir, 99/1970/.